Безверхнєв Я. Г.
Сигетій І. П.

Про деякі напівгрупи, які є об'єднанням груп

Ужгород
Видавництво "Карпати"
1996

ББК 22.144
Б 39

В книзі описано деякі властивості певного класу напівгруп. Напівгрупи, розглянуті в даній роботі, є об'єднанням груп.

Книжка розрахована на наукових працівників, аспірантів та студентів старших курсів.

Б $\frac{1602040000-007}{215-96}$ Без оголошення

ISBN 5-7757-0728-1

§1. Означення кратера.

1.1. ***Аксіоматика.*** Напівгрупу *Cr* із введеною на ній бінарною алгебраїчною операцією „·" для якої виконуються слідуючі властивості:

(Cr1) $\forall\ a \in Cr\ \exists!$ елемент $e_a \in Cr : e_a \cdot a = a \cdot e_a = a$

(Cr2) $\forall\ a \in Cr\ \exists!$ елемент $a^{-1} \in Cr : a^{-1} \cdot a = a \cdot a^{-1} = e_a$

назвемо *к р а т е р о м* .

Надалі знак бінарної алгебраїчної операції будемо опускати.

Потужність $|Cr|$ кратера *Cr* назвемо порядком кратера. Якщо $|Cr|<\infty$, то кратер *Cr* назвемо *скінченним* і *нескінченним* в противному випадку. Якщо $\forall\ a,b \in Cr : ab = ba$, то кратер *Cr* назвемо *абелевим*.

Підкратером H кратера *Cr* назвемо піднапівгрупу елементів *Cr*, що задовільняє властивостям кратера відносно введеної в *Cr* бінарної алгебраїчної операції (позначимо $H \le Cr$). *Ядром* кратера назвемо множину $\xi(Cr) = \{x \in Cr \mid \exists\ a \in Cr : ax = xa = a\}$, *антиядром* - множину $\varepsilon(Cr) = Cr \setminus \xi(Cr)$.

·	e_a	e_b	a	b
e_a	e_a	e_b	a	b
e_b	e_a	e_b	a	b
a	a	b	e_a	e_b
b	a	b	e_a	e_b

Рядом приведена таблиця підтверджує існування кратерів. Кратер, заданий таким чином позначимо через **SBC(2)**. Скажемо, що елемент $a \in Cr$ *належить ядру*, якщо $aa = a$. Кратер назвемо *виродженим*, якщо кожен його елемент належить ядру. Для SBC(2) можна побачити слідуючі закономірності :

1. $e_a b = b$; 2. $\forall\ b \in \varepsilon(SBC(2))$: $b e_a = a$; 3. $aa = e_a$.

Виявляється, що за цими властивостями можна побудувати загальний випадок SBC(n) (з ядром порядку n). Причому тоді $|SBC(n)| = 2n$. SBC(n) є першим прикладом неабелевого кратера.

1.2. ***Властивості.*** Спираючись на аксіоми кратера можна отримати деякі властивості кратера. Оскільки $a e_a = a$, то домножаючи зліва до обидвох сторін по a^{-1}, отримаємо $e_a e_a = e_a$. (1)

Із (1), спираючись на аксіоми кратера, отримаємо $e_{e_a} = e_a$ та $e_a{}^{-1} = e_a$. Тепер розглянемо елемент $c = e_a a^{-1}$: $ac = a e_a a^{-1} = = aa^{-1} = e_a$; $ca = e_a a^{-1} a = e_a e_a = e_a$. Отже $ac = ca = e_a \Rightarrow c = a^{-1}$, тобто $e_a a^{-1} = a^{-1}$. Далі $h = a^{-1} e_a$ тоді $ah = aa^{-1} e_a = e_a e_a = e_a$ та $ha = a^{-1} e_a a = a^{-1} a = e_a \Rightarrow ah = ha = e_a \Rightarrow h = a^{-1}$.

Отже $e_a a^{-1} = a^{-1} e_a = a^{-1}$, звідки отримаємо слідуючу формулу (2): $e_{a^{-1}} = e_a$. Із (2) легко отримати (3) : $(a^{-1})^{-1} = a$, а саме : $a^{-1}(a^{-1})^{-1} = (a^{-1})^{-1}a^{-1} = e_{a^{-1}}$; $a^{-1}a = aa^{-1} = e_a \Rightarrow e_{a^{-1}} = e_a$.

§2. Основні теореми.

2.1. ***Абелеві та тривіальні кратери.*** Ядро кратера Cr назвемо *тривіальним*, якщо $\forall a,b \in Cr$ виконується : $e_a = e_b$.

Центром кратера Cr назвемо множину $\vartheta(Cr) = \{a \in Cr \mid \forall x \in Cr : xa = ax\}$. Тоді справедливими є слідуючі теореми :

Теорема 1. Абелевий кратер має тривіальне ядро.

Дійсно: $\forall$ $a,b \in Cr$ виконується $ab = e_a ab = ba = ba e_a = ab e_a$ і $ab = ab e_b = ba = e_b ba = e_b ab$, оскільки $ab = ba$. Звідки $e_a = e_b$, тобто ядро кратера є тривіальним. □

Як наслідок з даної теореми випливає те, що абелевий кратер є абелевою групою.

Теорема 2. Кратер має центр тоді і тільки тоді, коли його ядро є тривіальним.

□ Необхідність : Нехай $a \in \vartheta(Cr)$. Тоді $ab e_a = ba e_a = ba = ab$, тобто $ab e_a = ab$. Але $e_a ab = ab \Rightarrow e_a ab = ab = ab e_a \Rightarrow e_a = e_{ab}$, де b - довільний елемент із Cr. Тепер розглянемо: $e_b ab = a e_b b = ab = ab e_b \Rightarrow e_b = e_{ab}$. Тобто $e_a = e_b \leftarrow \forall$ $b \in Cr$, отже його ядро є тривіальним.

Достатність є очевидною. □

Нетривіальним (тривіальним) кратером назвемо кратер, який не має (має) тривіальне ядро. Тоді ясно, що нетривіальний кратер повинен бути неабелевим. Також з попередніх теорем видно, що нетривіальний кратер не містить центра. Зауважимо, що теореми 1,2 можна довести спираючись на слідуючу лему

Лема 1. Якщо $ab = ba$, то $e_a = e_b$.

□ $ab = e_a ab = ba = ba e_a = ab e_a \Rightarrow e_a = e_{ab}$.

$ba = e_b ba = ab = ab e_b = ba e_b \Rightarrow e_b = e_{ab}$.

Тобто $e_a = e_b$. □

2.2. ***Групи кратера.***

Теорема 3. Кратер є об'єднанням груп.

□ Введемо над кратером еквівалентність : $a \sim b \Leftrightarrow e_a = e_b$.

Оскільки $e_a = e_a$ то $a \sim a$; якщо $e_a = e_b$, тоді $e_b = e_a \Rightarrow$ якщо $a \sim b$ то $b \sim a$; нехай $e_a = e_b$, $e_b = e_c$ то $e_a = e_c \Rightarrow$ якщо $a \sim b$, $b \sim c$ тоді $a \sim c$. Отже задане відношення є еквівалентністю, яка розбиває кратер на класи еквівалентності, які є групами. Дійсно : $a \sim e_a$, $a \sim a^{-1}$. Позначимо клас до якого належить елемент e_a через $\bar{e}_a$. Нехай $b, c \in \bar{e}_a$ покажемо, що $bc \in \bar{e}_a$. Оскільки $e_b = e_c = e_a$, то $bc = e_a bc = bc e_a \Rightarrow e_a = e_{bc}$, тобто $bc \in \bar{e}_a$, це означає що кожен клас є групою. □

2.3. *Основна теорема для неядерних кратерів.*

Кратер Cr назвемо *ядерним (неядерним)*, якщо $\xi(Cr)\xi(Cr) = \xi(Cr)$ (в противному випадку).

Теорема 4. (Основна теорема для неядерних кратерів).

Якщо Cr - неядерний кратер, тобто $\exists e_x, e_y \in \xi(Cr)$ де $e_x \neq e_y$, що $e_x e_y = b$ (де $b \notin \xi(Cr)$), тоді $\begin{cases} e_c e_d = b \\ e_d e_c = a \end{cases}$ $\begin{cases} e_b e_a = c \\ e_a e_b = d \end{cases}$, де c, d, a, b - із різних груп кратера та із антиядра.

□ Доведення проведемо в три етапи. Нехай $\begin{cases} e_x e_y = b \\ e_y e_x = a \end{cases}$.

<u>Етап 1-ий</u> : Нехай y, b - із однієї групи кратера ($e_y = e_b$). Тоді $e_x e_b = b \Rightarrow e_x b^{-1} = e_b$, підставивши, отримаємо : $e_x e_x b^{-1} = b \Rightarrow e_x b^{-1} = b$ тобто $b = e_b$ - чого не може бути. Отже y, b - в різних групах. Нехай x, b - в одній групі кратера. Тоді $e_b e_y = b \Rightarrow b^{-1} e_y = e_b$, підставивши, отримаємо : $b^{-1} e_y e_y = b \Rightarrow b^{-1} e_y = b$ тобто $b = e_b$ - чого теж не може бути. Отже x, y, b - в різних групах. Розглянемо довільні h, g що $e_g e_h = e_h$. Позначимо $e_h e_g = t$. Тоді $t = e_g e_h e_g = e_g t$, а також $t e_g = t \Rightarrow t e_g = e_g t = t \Rightarrow g, t$ - в одній групі кратера, але тоді t - із ядра. Тобто $e_h e_g = e_g$. Аналогічно показується, що коли $e_g e_h = e_g$, то $e_h e_g = e_h$.

<u>Етап 2-ий</u> : а). Нехай x, y, b із різних груп кратера. Тоді, як було показано вище, отримаємо :

$b e_y = b \Rightarrow e_b e_y = e_b \Rightarrow e_y e_b = e_y$, аналогічно $e_a e_x = e_a$; $e_b e_x = e_x$; $e_a e_y = e_y$. Тепер доведемо ряд формул :

$e_x a = b e_x = ba$ (1) ; $e_y b = a e_y = ab$ (2) ;

(1) : $e_x a = e_x e_y e_x = e_x e_y e_y e_x = ba$

$b e_x = e_x e_y e_x = e_x e_y e_y e_x = ba$;

(2) : $e_y b = e_y e_x e_y = e_y e_x e_x e_y = ab$

$a e_y = e_y e_x e_y = e_y e_x e_x e_y = ab$;

$e_a b = a e_b$ (3) ; $b e_a = e_b a$ (4) ;

(3) : Враховуючи (2), отримаєм: $(ab)b = (a e_y)b = a(e_y b) =$

$= a(ab) \Rightarrow e_a b e_b = e_a a e_b \Rightarrow e_a b = a e_b$;

(4) : За (1): $b(ba) = b(e_x a) = (b e_x)a = (ba)a \Rightarrow e_b b e_a = e_b a e_a \Rightarrow$

$\Rightarrow b e_a = e_b a$;

$e_a e_b = ab^{-1}$ (5) ; $a e_b = e_y$ (6) ;

(5) : випливає із (3) ;

(6) : із (2), маємо $e_y b = ab \Rightarrow e_y e_b = a e_b$, але $e_y e_b = e_y \Rightarrow$

$\Rightarrow a e_b = e_y$;

$e_a e_b e_a = a^{-1}$ (7) ; $e_b e_a e_b = b^{-1}$ (8) ;

(7) : $a(ba) = a(e_x a) = (a e_x)a = aa \Rightarrow e_a b e_a = e_a e_a = e_a$, але за (3) отримаємо $a e_b e_a = e_a \Rightarrow e_a e_b e_a = a^{-1}$;

(8) : $b(ab) = b(e_y b) = (b e_y)b = bb \Rightarrow e_b a e_b = e_b e_b = e_b$, але за (4): $b e_a e_b = e_b \Rightarrow e_b e_a e_b = b^{-1}$.

b). Якщо a,b - із однієї групи кратера ($e_a = e_b$), тоді за формулою (4) отримаємо, що $a = b \Rightarrow e_y e_x = e_x e_y$.

Використовуючи Лему 1, дістанемо, що e_x, e_y - із однієї групи, тобто $e_x = e_y$ - протирічить умовам теореми.

Отже a,b - з різних груп, тоді можна розглянути нові елемен -ти: $e_b e_a = c$, $e_a e_b = d$, якщо c,d - із однієї групи кратера, тоді за вищевказаним алгоритмом отримаємо, що a,b - в одній групі кратера, але тоді x,y - в одній групі, і т. д.

Скажемо, що пара (x,y) породить пару (b,a), якщо

$$\begin{cases} e_x e_y = b \\ e_y e_x = a \end{cases}$$

, і позначимо $(x,y) \rightarrow (b,a)$. Тобто надалі будемо розглядати такі пари, елементи якої із різних груп кратера.

Нехай існує елемент пари, що лежить в одній групі кратера з елементом із породжуючої пари, нехай $(h,g) \rightarrow (w,v) \rightarrow (m,n)$ і m,w - з однієї групи, тоді за (Етапом 1) :. $m = e_w \Rightarrow n = e_v \Rightarrow$

$\Rightarrow e_w e_v = e_w$ та $e_v e_w = e_v$, тоді за (6) : $e_g = ve_w = ve_v e_w =$ $= ve_v = v$, але тоді $w = e_h$, і т. д. остаточно отримаємо, що $b = e_x$ - суперечить вибору b. Тобто ми одержимо послідовність пар, де елементи сусідніх пар всі з різних груп.

Етап 3-ій : Пари $A=(h,g), B=(m,n)$ будемо називати відповідними, якщо h,m - в одній групі та g,n - в одній групі кратера, і позначати $A \sim B$. Нехай $(h,g) \rightarrow (w,v) \rightarrow (m,n)$, тоді : $mn = e_w e_v e_w = w^{-1}$, оскільки $(h,g) \rightarrow (w,v)$ тобто можна користуватися попередньо виведеними формулами $\Rightarrow e_m =$ $= me_n = mnm^{-1} = w^{-1}m^{-1} \Rightarrow e_w e_m = wm$, але $e_w e_m = e_m \Rightarrow$ $\Rightarrow wm = e_m \Rightarrow we_w e_v = we_v = e_m$, але $we_v = e_h \Rightarrow e_h = e_m$, аналогічними міркуваннями можна показати, що $e_g = e_n \Rightarrow$ $\Rightarrow (h,g) \sim (m,n)$. Оскільки $(x,y) \rightarrow (b,a) \rightarrow (c,d) \rightarrow (i,j) \rightarrow \dots$ та $(x,y) \sim (c,d) \Rightarrow b = i,\ a = j \Rightarrow \begin{cases} e_c e_d = b \\ e_d e_c = a \end{cases} \begin{cases} e_b e_a = c \\ e_a e_b = d \end{cases}$. $(x,y) \sim (c,d) \Rightarrow$ $e_x = e_c, e_y = e_d \Rightarrow$ Цикл починається з першої ж пари.

Нехай $c = e_c$, тоді осільки $e_c e_b = e_b \Rightarrow b = ce_b = e_b \Rightarrow$ $\Rightarrow b = e_b$ - протиріччя. Аналогічні міркування можна провести для елемента d. Якщо $a = e_a$, тоді $d = ae_b = e_d$ - знову прийдемо до протиріччя. Отже a,b,c,d - із антиядра кратера. □

Надалі будемо розглядувати лише ядерні кратери.

2.4. *Основні теореми для ядерних кратерів.*

Корисними в подальшій роботі будуть наступні теореми :

Лема 2. (Про середній ідемпотент). Якщо $a,b,c \in Cr$, тоді $e_a e_c e_b = e_a e_b$.

□ Позначимо : $e_a e_c e_b = x$. Тоді нехай $xe_a = t$. Зрозуміло, що x та t - із ядра кратера. Але $te_a = t$, $e_a t = e_a (xe_a) =$ $= (e_a x) e_a = xe_a = t \Rightarrow te_a = e_a t = t \Rightarrow t = e_a$. Тобто $xe_a = e_a$. Аналогічно встановлюється, що $e_b x = e_b$. Але тоді $e_a e_b =$ $= (xe_a)(e_b x) = h$, де h - із ядра. Але ж $hx = h$ та $xh = h \Rightarrow$ $\Rightarrow x = h$. А отже $e_a e_b = x$. □

Наслідок : $ae_c b = ab$, оскільки $ae_c b = ae_a e_c e_b b = ae_a e_b b = ab$.

Лема 3. (Про два ідемпотенти). Якщо $a,b \in Cr$, тоді $e_{ab} = e_a e_b$.

□ Позначимо : $e_a e_b = e_c$, $ab = h$. Доведемо, що $e_h = e_c$:

$h e_c = (ab)(e_a e_b) = a b e_b = ab = h$; $e_c h = (e_a e_b)(ab) = e_a ab =$
$= ab = h \Rightarrow h e_c = h = e_c h$. Отже $e_h = e_c$. □

Лема 4. Для $\forall Cr : \xi(Cr) \cdot \varepsilon(Cr) = \varepsilon(Cr) \cdot \xi(Cr) = \varepsilon(Cr)$.

□ Припустимо протилежне, тобто $\exists\, b \in \xi(Cr), e_a \in \varepsilon(Cr)$, що $e_a b = e_c \Rightarrow b^{-1}(e_a b)b = b^{-1} e_c b \Rightarrow b^{-1}bb = b^{-1}b$, тобто $b = e_b$, що протирічить вибору b. Аналогічно встановлюється друга частина рівності. □

Лема 5. Для $\forall\, a,b \in Cr : (ab)^{-1} = e_a b^{-1} a^{-1} e_b$.

□ Розглянемо : $(ab)(e_a b^{-1} a^{-1} e_b) = a b b^{-1} a^{-1} e_b = a e_b a^{-1} e_b =$
$= a a^{-1} e_b = e_a e_b$, та $(e_a b^{-1} a^{-1} e_b)(ab) = e_a b^{-1} e_a b = e_a e_b \Rightarrow$
за отриманими рівностями та Лемою 3 : $(ab)^{-1} = e_a b^{-1} a^{-1} e_b$.
□

Теорема 5. Порядки груп скінченого кратера - рівні.

□ Нехай $Cr = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$, та H - група максимального порядку із вказаних, $|H| > |F|$, де F - також із вказаних груп $\Rightarrow \exists\, a,b \in H, t \in F$ (причому $a \neq b$), що $e_F a e_F = t$ і $e_F b e_F = t \Rightarrow e_H (e_F a e_F) e_H =$
$= e_H t e_H = e_H (e_F b e_F) e_H \Rightarrow a = b$ - протиріччя. Тобто групи максимального порядку не існує $\Rightarrow$ порядки груп рівні. □

Наслідки : 1. $|Cr| = |\xi(Cr)| \cdot |G_k|$; 2. $|\xi(Cr)| \mid |\varepsilon(Cr)|$.

Лема 6. Якщо H - довільна група скінченого кратера та b - будь-який елемент цього кратера, тоді $e_H bH = H$.

□ Зрозуміло, що $e_H bH \subseteq H$ і $|e_H bH| \leq |H|$. Припустимо, що $|e_H bH| < |H|$, тобто $\exists\, h,g,t\ (h \neq g) \in H$, що :
$e_H bh = t$ і $e_H bg = t \Rightarrow e_b h = b^{-1}t$, $e_b g = b^{-1}t \Rightarrow e_b h = e_b g \Rightarrow$
$\Rightarrow e_H = h^{-1}g \Rightarrow h = g$ - протиріччя. Отже $|e_H bH| = |H|$.
А це означає, що $e_H bH = H$. □

Лема 7. Нехай G,H,F - групи скінченого кратера, та $e_G e_H =$
$= e_F$. Тоді $GH = F$.

□ Оскільки $e_G e_H = e_{GH} = e_F \Rightarrow GH \subseteq F$. Зрозуміло, що $|Gh| \leq |F|$, де $h \in H$. Припустимо : $|Gh| < |F|$, тобто $\exists\, a,b$ $(a \neq b) \in G$, що $ah = t$ і $bh = t \Rightarrow a e_H = th^{-1}$, $b e_H = th^{-1} \Rightarrow$
$\Rightarrow a e_H = b e_H \Rightarrow a e_H e_G = b e_H e_G \Rightarrow a = b$ - протиріччя. Отже $|Gh| = |F| \Rightarrow |GH| = |F|$, це означає, що $GH = F$. □

Теорема 6. Групи скінченого кратера є ізоморфними.

□ Нехай $Cr = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$. Виберемо довільні групи H та F цього кратера. Задамо ін'єктивне відображення Γ: $H \rightarrow F$ по правилу $\Gamma(a) = e_F a e_F$. Тоді $\Gamma(ab) = e_F ab e_F = (e_F a e_F)(e_F b e_F) =$ $= \Gamma(a)\Gamma(b) \Rightarrow \Gamma$ - гомоморфізм. Нехай тепер $\Gamma(a) = \Gamma(b) \Rightarrow$ $\Rightarrow e_F a e_F = e_F b e_F \Rightarrow e_H (e_F a e_F) e_H = e_H (e_F b e_F) e_H \Rightarrow a = b$. Тобто $\Gamma(a) = \Gamma(b) \Leftrightarrow a = b$. Отже Γ - мономорфізм, оскільки $|H| = |F|$, то Γ - ізоморфізм $\Rightarrow H \cong F$. Оскільки групи H та F вибиралися довільно, то групи кратера є ізоморфними. □

Підсумовуючи все вище сказане, можна зробити висновок, що основними характеристиками скінченого ядерного кратера є одна з його груп та ядро.

§3. Підкратери.

3.1. Підкратери. Назвемо підкратер H кратера *Cr повним (неповним)*, якщо ядра H і *Cr* - співпадають (не співпадають).

Лема 1. Якщо $Cr = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$ $(|Cr| < \infty)$ та $H_k \le G_k$, тоді $e_{G_k} H_j e_{G_k} = H_k$, де $H_k \cong H_j$.

□ Для простоти запису позначимо $e_{G_k} = 1$, $e_{G_j} = 0$. Покажемо, що $1 H_j 1 \cong H_j$, задаючи ін'єктивне відображення Γ: $1 H_j 1 \rightarrow H_j$ слідуючим чином : $\Gamma(1h1) = h$. Тоді $\Gamma(1hg1) = hg = \Gamma(1h1)\Gamma(1g1)$, тобто Γ - гомоморфізм. Легко перевірити, що Γ - мономорфізм. Тобто $1 H_j 1 \cong H_j$, але $1 H_j 1 \subseteq G_k$. Нехай $1 H_j 1 = H_k$, покажемо, що H_k - група. Оскільки $101 = 1 \Rightarrow 1 \in H_k$. Якщо $1h1 = a$ і $1g1 = b \Rightarrow ab = (1h1)(1g1) = 1hg1$. Тобто $ab \in H_k$. Нехай тепер $1h1 = a \Rightarrow (1h^{-1}1)a = 1h^{-1}h1 = 1$, $a(1h^{-1}1) = 1hh^{-1}1 = 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow a^{-1} = 1h^{-1}1 \Rightarrow a^{-1} \in H_k$. Тобто H_k - група. Але $1 H_j 1 \cong H_j$ та $1 H_j 1 = H_k$, тобто $H_k \cong H_j$. □

Теорема 1. Якщо $Cr = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$ $(|Cr| < \infty)$ та $H_k \le G_k$, тоді існує повний підкратер H групою якого є H_k.

□ Виберемо $\forall$ G_i та G_j і нехай $G_i G_j = G_k$. Для простоти запису, позначимо $e_{G_k} = 0$. Тоді якщо $H_i \le G_i$, $H_j \le G_j$ та $H_i \cong H_j$, то $H_i H_j \subseteq G_k \Rightarrow 0(H_i H_j)0 = H_i H_j \Rightarrow H_i H_j = (0 H_i 0)(0 H_j 0) =$ $= H_k H_k = H_k$, де $H_j \cong H_k$ і $H_i \cong H_k$.

Отже $H = \bigcup_{k=1}^{n} H_k$ - замкнена, відносно бінарної операції, множина. Цього достатньо для того, щоб множина H була підкратером. □

У всякому кратері ядро, група і сам кратер завжди є підкратерами. Підкратери відмінні від даних назвемо *власними*. Кратер Cr назвемо *орієнтованим*, якщо $\forall e_x, e_y \in Cr$, що $e_x e_y = e_x$ або $e_x e_y = e_y$. Орієнтований кратер в якому виконується : $\forall e_x, e_y \in Cr$ $e_x e_y = e_x$ ($e_x e_y = e_y$) назвемо *лівим (правим)*. Наступна теорема описує орієнтовані кратери.

Теорема 2. Орієнтованими кратерами є в точності праві та ліві кратери.

□ Припустимо, що $\exists$ орієнтований кратер в якому існують такі $e_x \neq e_y$ і $e_a \neq e_b$, що : $e_a e_b = e_b$, $e_x e_y = e_x$. Оскільки кратер - орієнтований, то існують дві можливості

(i) : $e_x e_a = e_a$ або (ii) : $e_x e_a = e_x$.

Розглянемо (i) : $e_x e_a = e_a \Rightarrow e_x e_a e_y = e_a e_y \Rightarrow e_x = e_x e_y = e_a e_y \Rightarrow$ оскільки $e_x \neq e_y$, то $e_x = e_a \Rightarrow e_a = e_a e_y \Rightarrow e_a = e_a e_b e_a = e_b (e_a e_y) = e_b e_y \Rightarrow e_y = e_a \Rightarrow e_x = e_a = e_y$, що протирічить вибору елементів e_x та e_y. Аналогічними міркування ми отримаємо протиріччя у випадку (ii). □

Кратери в яких існують такі три попарно різні елементи a,b,c із ядра кратера, що $ab = c$ назвемо *мішаними*. Рядом приведена таблиця множення одного з мішаних кратерів.

·	a	b	c	d
a	a	b	a	b
b	a	b	a	b
c	c	d	c	d
d	c	d	c	d

Нехай H - підкратер кратера Cr, тоді H назвемо *нормальним* підкратером кратера Cr, якщо $\forall a \in Cr : aHe_a = e_a Ha$, де aHe_a - *лівий* ($e_a Ha$- *правий*) *суміжний клас* кратера Cr по підкратеру H. Будемо позначати $H \triangleleft Cr$.

Покажемо, що насправді для того, щоб $H \triangleleft Cr$ необхідно і достатньо, щоб $\forall a \in Cr : aHa^{-1} \subseteq e_a He_a$. Необхідність є очевидною. Доведемо достатність : $aHa^{-1} \subseteq e_a He_a$ та $a^{-1}Ha \subseteq e_a He_a \Rightarrow aHe_a \subseteq e_a Ha$ та $e_a Ha \subseteq aHe_a$ тобто $aHe_a = e_a Ha$.

Нехай $H \leq Cr$. Розглянемо множину лівих суміжних класів. По перше, зрозуміло, що $\forall a \in Cr : a \in aHe_a$. Нехай $H = \bigcup_{k=1}^{n} H_k$. Доведемо, шо $|aHe_a| = |H_k|$. Дійсно $aH_i e_a = a(e_a H_i e_a) = aH_k$, де $a \in H_k \Rightarrow |aHe_a| = |aH_k| = |H_k|$.

Тепер розглянемо, коли класи співпадають : $aHe_a = bHe_b \Rightarrow e_{aHe_a} = e_{bHe_b}$, тобто $e_a = e_b \Rightarrow a(e_a He_a) = b(e_b He_b) \Rightarrow aH_k = = bH_k$, де $a,b \in Cr \Rightarrow b^{-1}a \in H_k$. Покажемо, що суміжні класи або співпадають, або не перетинаються. Нехай$(aHe_a) \cap (bHe_b) \neq \varnothing$. Тоді $\exists\ x = ahe_a = bte_b \Rightarrow e_{ahe_a} = e_{bte_b}$, тобто $e_a = e_b \Rightarrow be_t = = aht^{-1} = ag$, де $g = ht^{-1} \in H$. Тоді для $\forall$ елемента суміжного класу bHe_b: $bse_b = (be_t)se_b = (ag)se_b = ake_a$, де $k = gs \in H$. Тобто кожен елемент класу bHe_b є елементом суміжного класу $aHe_a \Rightarrow \Rightarrow bHe_b \subseteq aHe_a$. Аналогічно встановлюється включення: $aHe_a \subseteq \subseteq bHe_b \Rightarrow aHe_a = bHe_b$, тобто суміжні класи або співпадають, або не перетинаються.

Теорема 3. Нехай $H = \bigcup\limits_{k=1}^{m} H_k$, $Cr = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$ та $H < Cr$. Тоді $H \lhd Cr$ тоді і тільки тоді, коли $H_k \lhd G_k$.

□ <u>Необхідність</u> : $H \lhd Cr \Leftrightarrow \forall\ a \in Cr : aHe_a = e_a Ha$.
Нехай $a \in G_k \Rightarrow aHe_a = aH_k e_a = aH_k \Rightarrow aH_k = e_a Ha = = (e_a He_a)a = H_k a \Rightarrow H_k \lhd G_k$.
<u>Достатність</u> : Візьмемо $\forall\ a \in Cr$, якщо $a \in G_k \Rightarrow aHe_a = aH_k = = H_k a = e_a Ha \Rightarrow H \lhd Cr$. □
<u>Наслідок</u> : $\xi(Cr) \lhd Cr$.

3.2. Проабелеві кратери. Кратер Cr назвемо *проабелевим*, якщо $\forall\ a,b \in Cr$: $e_b ab = bae_b$. Наступна теорема дає змогу описати проабелеві кратери.

Теорема 4. Кратер є проабелевим тоді і тільки тоді, коли його група є абелевою.

□ <u>Необхідність</u> : Нехай $e_b = e_a$ тоді оскільки $e_b ab = bae_b \Rightarrow \Rightarrow ab = ba$, тобто група кратера є абелевою.
<u>Достатність</u> : Нехай a,b - з різних груп кратера та $e_b ae_b = c$, але $bc = cb \Rightarrow b(e_b ae_b) = (e_b ae_b)b \Rightarrow bae_b = e_b ab \Rightarrow$ кратер - проабелевий. □

Елементи a,b назвемо *ізоморфними*, якщо $a = e_a be_a$, і будемо позначати $a \sim b$. Покажемо, що ізоморфізм елементів є еквівалентністю. Зрозуміло, що $a \sim a$. Нехай $a \sim b \Rightarrow a = e_a be_a \Rightarrow \Rightarrow e_b ae_b = e_b(e_a be_a)e_b = b \Rightarrow b \sim a$. Тепер нехай $a \sim b$ та $b \sim c \Rightarrow \Rightarrow b = e_b ae_b = e_b ce_b \Rightarrow e_a(e_b ae_b)e_a = e_a(e_b ce_b)e_a \Rightarrow a = = e_a ce_a \Rightarrow a \sim c$, що і треба було довести. В подальшому поняття ізоморфізму елементів буде дуже корисним.

Нехай $a \sim b$, тоді $a = e_a b e_a \Rightarrow a = ((e_a b) e_a)^{-1} =$
$= e_{e_a b} e_a^{-1} (e_a b)^{-1} e_{e_a} = e_a e_a (e_a b)^{-1} e_a = e_a e_{e_a} b^{-1} e_a^{-1} e_b e_a =$
$= e_a b^{-1} e_a \Rightarrow a^{-1} \sim b^{-1}$.

Лема 2. Якщо $e_a e_b = e_c$ та $a \sim x$, $b \sim y$, де x, y, c - із однієї групи, тоді $ab = xy$.

□ $a \sim x$ і $b \sim y \Rightarrow x = e_c a e_c$, $y = e_c b e_c$. Оскільки ab, c - з однієї групи кратера, то $ab = e_c ab e_c = (e_c a e_c)(e_c b e_c) = xy$. □

§4. Комутант. Факторкратер.

4.1. Комутант. В цьому параграфі приведемо декілька конструкцій, які можна побудувати в кратері.

Вираз $[a,b] = a^{-1} b^{-1} ab$ будемо називати *комутатором* елементів a і b. Легко перевірити, що $e_{[a,b]} = e_a e_b = [e_a, e_b]$ і $[a,b]^{-1} = e_a [b,a] e_b = [e_a b, a e_b]$. Множину породжену всіма можливими комутаторами назвемо *комутантом* кратера. Зрозуміло, що комутант є підкратером кратера Cr, будемо його позначати через Cr'. Оскільки $[e_a, e_a] = e_a$, то Cr' - повний підкратер.

Виявляється, що комутант є нормальним підкратером. Нехай $a \in Cr'$, $b \in Cr$, тоді $e_a b^{-1} ab = (a[a,b])\ e_b \in Cr' e_b \Rightarrow$
$\Rightarrow e_a b^{-1} Cr' b \subseteq Cr' e_b \Rightarrow e_b Cr' b = b e_a b^{-1} Cr' b \subseteq b Cr' e_b \Rightarrow$
$\Rightarrow Cr' \triangleleft Cr$.

Нехай $Cr = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$, $a \in G_k$ і $h \in G_i$, $G_k G_i = G_t$. Нехай також $h \sim x$, $a \sim y$, де $x, y \in G_t \Rightarrow [a,h] = a^{-1} h^{-1} ah = y^{-1} x^{-1} yx = [y,x] \Rightarrow$
$\Rightarrow [G_k, G_i] = [G_t, G_t]$. Тобто $Cr' = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$.

Оскільки комутант кратера є підкратером, то можна розглядати комутант від комутанта і т.д. Покладаємо, що $Cr^{(n)} = (Cr^{(n-1)})'$. Якщо існує таке натуральне число n, що $Cr^{(n)} = \xi(Cr)$, то кратер назвемо розв'язним. Зрозуміло : $Cr^{(n)} =$ $= \bigcup_{k=1}^{n} G_k^{(n)}$. З цього випливає : кратер є розв'язним $\Leftrightarrow$ коли є розв'язною група цього кратера. Тоді, враховуючи результати з теорії груп, можна отримати слідуючі наслідки :

1. Кратер з групою порядку p^n є розв'язним;

2. Кратер порядку p^m теж є розв'язним;
3. Кратер з групою непарного порядку є розв'язним;
4. Кратер непарного порядку є розв'язним.

4.2. Факторкратер. Нехай $H \triangleleft Cr$. Будемо позначати суміжний клас aHe_a через $[a]$. Тоді $[a][b]=aHe_a\,bHe_b = = a(e_b Hb)He_b = a(bHe_b)He_b = abHHe_b = abHe_b\,e_b = [ab]$; $([a][b])[c]=[ab][c]=[(ab)c]=[a(bc)]=[a][bc]=[a]([b][c])$. Знайдемо нейтральний суміжний клас для $[a]$:

Нехай $[b][a]=[a][b]=[a] \Rightarrow e_{[b][a]}=e_{[a][b]}=e_{[a]} \Rightarrow e_a=e_b$. Тоді : $a^{-1}[a][b]=a^{-1}[a] \Rightarrow a^{-1}(abHe_b)=a^{-1}(aHe_a) \Rightarrow bHe_b = = e_a He_a \Rightarrow [b]=[e_a]$, тобто єдиним нейтральним класом для $[a]$ є клас $[e_a]$. Нехай тепер : $[b][a]=[a][b]=[e_a]$. Тоді зрозуміло, що $e_a=e_b$ і $a^{-1}[ab]=a^{-1}[e_a] \Rightarrow a^{-1}(abHe_a e_b)= =a^{-1}(e_a He_a) \Rightarrow bHe_b=a^{-1}He_a$, тобто $[b]=[a^{-1}] \Rightarrow [a]^{-1}=[a^{-1}]$.

З усього вищесказаного бачимо, що множина суміжних класів кратера за його нормальним підкратером також утворює кратер, який ми назвемо *факторкратером* кратера Cr за підкратером H і будемо позначати Cr/H. Деякі властивості фактократера описує слідуюча лема.

Лема 1. Якщо $H=\bigcup_{k=1}^{m} H_k$, $Cr=\bigcup_{k=1}^{n} G_k$ і $H \triangleleft Cr$ тоді :

1. $Cr/H=\bigcup_{k=1}^{n} G_k/H_k$; 2. $|Cr/H|=\frac{|Cr|}{|H_k|}$.

□ 1. Якщо $a \in G_k$, то $[a]=aHe_a=aH_k e_a=aH_k$, де $H_k<G_k$. Оскільки кожен елемент кратера попадає в деякий суміжний клас, то 1 - є справедливим.
2. Безпосередньо слідує із 1. □

4.3. Прямий добуток кратерів. *Зовнішнім прямим добутком* кратерів F і H ($F\times H$) назвемо множину впорядкованих пар (f,h), де $f\in F$, $h\in H$ на якій задано слідуючу бінарну операцію : $(a,x)(b,y)=(ab,xy)$.

Пари (a,x), (b,y) будемо вважати рівними, якщо $a=b$, $x=y$. Тоді $|F\times H|=|F|\cdot|H|$. Оскільки в кратерах F та H виконується закон асоціативності, то він буде виконуватись і в $F\times H$. Тоді можна отримати слідуючі формули : $e_{(a,x)}=(e_a, e_x)$; $(a,x)^{-1}= =(a^{-1},x^{-1})$. Тобто $F\times H$ - кратер відносно введеної бінарної алгебраїчної операції. Далі можна отримати слідуючі результати :

1. $\xi(F\times H)=\xi(F)\times\xi(H)$;

2. $F \times H \cong H \times F$;
3. Якщо $A \leq F$, $X \leq H$ тоді $\Rightarrow A \times X \leq F \times H$;
4. Групою кратера $F \times H$ є зовнішній прямий добуток груп кратерів F та H;
5. $(F \times H) \times L \cong F \times (H \times L)$;
6. Якщо $A \triangleleft F$, $X \triangleleft H$, тоді $A \times X \triangleleft F \times H$.

§5. Гомоморфізми кратерів.

5.1. Гомоморфізми. Відображення Г кратера H в кратер F (Γ: $H \to F$) назвемо *гомоморфізмом* цих кратерів, якщо виконується умова : $\Gamma(ab) = \Gamma(a)\Gamma(b)$. Із означення гомоморфізма можна отримати рівності : $\Gamma(e_a) = e_{\Gamma(a)}$; $\Gamma(a^{-1}) = (\Gamma(a))^{-1}$. *Образом* кратера H при гомоморфізмі Г назвемо множину $\mathrm{Im}\,\Gamma = \{x \in F \mid \exists\, a \in H : x = \Gamma(a)\}$. *Ядром* гомомофізма Г назвемо множину $\mathrm{Ker}\,\Gamma = \{a \in H \mid \Gamma(a) \in \xi(F)\}$.

Лема 1. Якщо Γ: $H \to F$, тоді : a). $\mathrm{Ker}\,\Gamma \triangleleft H$; b). $\mathrm{Im}\,\Gamma \leq F$.
Доведення не потребує великих зусиль.

Відображення Г кратера H в кратер F (Γ: $H \to F$) назвемо *антигомоморфізмом* цих кратерів, якщо : $\Gamma(ab) = \Gamma(b)\Gamma(a)$.
Із означення антигомоморфізма можна отримати рівності : $\Gamma(e_a) = e_{\Gamma(a)}$; $\Gamma(a^{-1}) = (\Gamma(a))^{-1}$. *Образ* та *ядро* антигомоморфізма Г означуються аналогічно, як і для гомоморфізмів.

Зрозуміло, що автоморфізми кратера *Cr* утворюють групу, яку будем позначати Aut(*Cr*). Можна показати, що при автоморфізмі Г виконується : $\Gamma(A) = B$, де A і B - групи кратера.

Внутрішнім автоморфізмом I_a назвемо такий автоморфізм кратера, що $\forall\, g \in Cr$: $I_a(g) = e_g a^{-1} g a e_g$. Тоді $I_a I_b = I_{ab}$, де під добутком автоморфізмів підрозумівається їх послідовне виконання. Далі не потребує труднощів, щоб показати, що внутрішні автоморфізми утворюють групу, яку ми позначимо Inn(*Cr*). Насправді $\mathrm{Inn}(Cr) \triangleleft \mathrm{Aut}(Cr)$, оскільки : $\forall\, \Gamma \in \mathrm{Aut}(Cr)$ виконується $(\Gamma^{-1} I_a \Gamma)(g) = (\Gamma^{-1} I_a)(\Gamma(g)) = \Gamma^{-1}\{\Gamma(e_g) a^{-1} \Gamma(g) a \Gamma(e_g)\} =$
$= \Gamma^{-1}(\Gamma(e_g))(\Gamma^{-1}(a))^{-1}\Gamma^{-1}(\Gamma(g))\Gamma^{-1}(a)\Gamma^{-1}(\Gamma(e_g)) =$
$= e_g (\Gamma^{-1}(a))^{-1} g \Gamma^{-1}(a)\, e_g = I_{\Gamma^{-1}(a)}(g)$.

Факторгрупу Aut(*Cr*)/Inn(*Cr*) назвемо групою *зовнішніх автоморфізмів* кратера і позначимо через Out(*Cr*).

5.2. Теореми про гомоморфізми.

Теорема 1. Якщо ядра та групи кратерів є ізоморфними, то є ізоморфними і самі кратери.

□ Нехай нам дано кратери H, F з групами A і B та ядрами $\xi(F)$, $\xi(H)$, причому $\Gamma: A \to B$ та $\Delta: \xi(H) \to \xi(F)$, де Γ, Δ - ізоморфізми. Тоді задамо відображення $\varphi : H \to F$ за правилом : $\varphi(a) = \Delta(e_a) \cdot \Gamma(a)\Delta(e_a)$. Тоді $\varphi(ab) = \Delta(e_{ab})\Gamma(ab)\Delta(e_{ab}) = \Delta(e_a)\Delta(e_b)\Gamma(ab) \cdot \Delta(e_a)\Delta(e_b) = \Delta(e_a)\Gamma(a)\Gamma(b)\Delta(e_b) = [\Delta(e_a)\Gamma(a)\Delta(e_a)][\Delta(e_b)\Gamma(b) \cdot \Delta(e_b)] = \varphi(a)\varphi(b)$, тобто φ - гомоморфізм. Нехай тепер $\varphi(a) = \varphi(b)$, позначимо : $x = \Delta(e_a)\Gamma(a)\Delta(e_a)$, $y = \Delta(e_b)\Gamma(b)\Delta(e_b)$. Тоді $e_x = e_y \Rightarrow \Delta(e_a) = \Delta(e_b) \Rightarrow e_a = e_b$, тобто a,b - з однієї групи кратера H. $\Rightarrow \Gamma(e_a)x\Gamma(e_a) = \Gamma(e_b)y\Gamma(e_b)$, тобто $\Gamma(a) = \Gamma(b) \Leftrightarrow a = b$, оскільки Γ - ізоморфізм. Це означає, що $\varphi(a) = \varphi(b) \Leftrightarrow a = b$, а тобто $H \cong F$, оскільки $|H| = |F|$. □

§6. Мішані кратери.

6.1. Мішані кратери. Орієнтовані кратери ми вже згадували. Виявляється, що описання мішаних кратерів зводиться до описання орієнтованих. Про це буде йтися в цьому параграфі.

Теорема 1. Скінчений мішаний кратер можна зобразити у вигляді об'єднання орієнтованих (як правих так і лівих) підкратерів.

□ Задамо на *Cr* еквівалентність : назвемо елементи $a, b \in Cr$ еквівалентними ($a \sim b$), якщо $e_a b = b$. Тоді : 1. $a \sim a$; 2. нехай $a \sim b$, тобто $e_a b = b \Rightarrow e_a e_b = e_b \Rightarrow (e_a e_b) e_a = e_b e_a \Rightarrow$ $\Rightarrow e_a = e_b e_a \Rightarrow e_b a = a$, тобто $b \sim a$; 3. нехай $a \sim b$ та $b \sim c \Rightarrow$ $\Rightarrow e_a e_b = e_b$, $e_b e_c = e_c \Rightarrow e_a e_c = e_a(e_b e_c) = (e_a e_b) e_c = = e_b e_c = e_c \Rightarrow e_a c = c$, тобто $a \sim c$. Із 1,2,3 безпосередньо слідує те, що *Cr* розбивається на класи еквівалентності. Нехай тепер $a \sim c$ і $a \sim b \Rightarrow e_a b = b \Rightarrow e_a (bc) = bc \Rightarrow a \sim (bc)$, тобто дані класи є замкненими відносно бінарної операції. Але $e_a e_a = e_a$ і $e_a a^{-1} = a^{-1} \Rightarrow a \sim e_a$, $a \sim a^{-1}$. Отже класи еквівалентності є правими кратерами. Оскільки ми могли б задати еквівалентність так : $a \sim b \Leftrightarrow b e_a = b$, то отримані класи були б лівими кратерами.

Такі праві (ліві) підкратери будемо називати *R-тандартними* (*L-стандартними*). □

6.2. Теореми про мішані кратери.

Лема 1. Групи стандартного підкратера і самого кратера є ізоморфними.

□ Нехай F,G - групи стандартного та самого кратера Cr відповідно. Припустимо, що F,G - не ізоморфні. Виберемо $H \cong F$, що $H \subset G$, де H - теж група цього стандартного підкратера. Оскільки $G \setminus H$ - не є групою та Cr є об'єднанням стандартних підкратерів, то отримаємо протиріччя. □

Дана лема дозволяє стверджувати, що розбиття Cr на стандартні підкратери залежить лише від розбиття ядра на підкратери.

Лема 2. (Про антизакон). Якщо $Cr = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$, де K_i - R-стандартні (L-стандартні), тоді $K_i K_m = K_i$ ($K_i K_m = K_m$).

□ Нехай $K_i K_m \subseteq K_v$ та $e_a \in K_i$, $e_b \in K_m$, $e_c \in K_v$, що $e_a e_b = e_c$. Тоді $e_a e_c = e_a (e_a e_b) = e_a e_b = e_c$, тобто e_a, e_c - з одного R-стандартного підкратера $\Rightarrow e_c \in K_i \Rightarrow K_i = K_v \Rightarrow$ $\Rightarrow K_i K_m \subseteq K_i$. Те що $K_i K_m = K_i$ - є очевидним. Аналогічно доводиться для L-стандартних. □

Теорема 2. L-стандартні (R-стандартні) підкратери кратера Cr є ізоморфними.

□ В силу Леми 1 достатньо довести, що порядки ядер стандартних підкратерів рівні. Нехай $Cr = \bigcup_{i=1}^{k} K_i$. Виберемо довільні R-стандартні підкратери K_i, K_m. Нехай $e_x \in K_m$, покажемо, що $\exists!\ e_b \in K_i$, що $e_b e_x = e_b$. Припустимо, що такого елемента не існує, тобто $\forall\ e_a \in K_i$: $e_a e_x = e_c$, де $e_a \neq e_c \Rightarrow e_c =$ $= e_a e_x = (e_a e_c) e_x = e_c e_x \Rightarrow e_c e_x = e_c$ - протиріччя.

Тепер припустимо, що $\exists\ e_a \neq e_b$ і $e_a e_x = e_a$, $e_b e_x = e_b \Rightarrow$ $\Rightarrow e_a = e_a e_x = e_a e_b e_x = e_b e_x = e_b$ - протиріччя. Отже $\forall\ e_x \in K_m\ \exists!\ e_b \in K_i$, що $e_b e_x = e_b$. Нехай тепер $e_b e_x = e_b$, $e_b e_y = e_b$ і $e_y \neq e_x$, $e_x \in K_m \Rightarrow e_x e_b = e_x$. Але $e_y = e_x e_y =$ $= (e_x e_b) e_y = e_x (e_b e_y) = e_x e_b = e_x$ - протиріччя.

Тобто кожному елементу із ядра K_m відповідає єдиний елемент із ядра K_i, а отже порядки їхніх ядер рівні. □

Теорема 3. Якщо $Cr = \bigcup_{i=1}^{r} R_i = \bigcup_{i=1}^{l} L_i$, де R_i, L_i - R-стандартні, L-стандартні підкратери відповідно, та n - порядок ядра кратера, тоді $n=l\cdot r$.

□ Доведення, фактично, випливає із попередньої теореми. □

Надалі, якщо в умовах попередньої теореми, буде виконуватися : $n=l\cdot r$, тоді кратер Cr будемо називати кратером *типу (l,r)*, а множину всіх таких кратерів будемо позначати через *T(l,r)*. Фактично мішані кратери є описаними, залишається описати їх підкратери, що приводиться у слідуюча теорема:

Лема 3. Якщо $Cr \in T(l,r)$ та $H \le Cr \Rightarrow \exists\ i,j$ - натуральні, що $|\xi(H)| = (l-i)\cdot(r-j)$, де $0 \le i \le (l-1)$, $0 \le j \le (r-1)$.

□ Нехай $Cr = \bigcup\limits_{i=1}^{r} R_i$, де R_i - R-стандартні. Тоді ядро будь-якого го підкратера можна отримати єдиним чином : відкидуючи деякі R_i-тові та із тих R-стандартних,що залишились відкинути по однаковій кількості груп, що і доводить потрібну нам формулу. □

Лема 4. Якщо $Cr = \bigcup\limits_{i=1}^{n} G_i$, $H \le Cr$, $F \le Cr$ та $H \in T(q,p)$, $F \in T(f,g)$, та $HF \le Cr$ і A,B - групи підкратерів H,F відповідно, тоді $|HF| = f\cdot p\cdot \dfrac{|A|\cdot|B|}{|A\cap B|}$.

□ Нехай $H = \bigcup\limits_{i=1}^{p} S_i$, $F = \bigcup\limits_{i=1}^{g} R_i \Rightarrow S_i R_i = S_i \Rightarrow |\xi(HF)| = |\xi(R_i)|\cdot p = f\cdot p$, що і доводить нашу формулу. □

Наукове видання

Безверхнєв Ярослав Геннадійович
Сигетій Ігор Петрович

ПРО ДЕЯКІ НАПІВГРУПИ,
ЯКІ Є ОБ'ЄДНАННЯМ ГРУП

Авторська редакція
Технічний редактор
Замовлення № 5577

Видавництво "Карпати"
294000, Ужгород, пл. Жупанатська, 3
ВВК "Патент"
294013, Ужгород, вул. Гагаріна, 101